

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι – Φεβρουάριος 2013

ΘΕΜΑ 1

α) Να βρεθούν οι επιτρεπτές περιοχές της κίνησης στον άξονα $x'Ox$ για την απωστική δύναμη $F = kx$, $k > 0$ και για ενέργεια E .

β) Υλικό σημείο μάζας m μπορεί να κινείται στον οριζόντιο άξονα $x'Ox$ υπό την επίδραση της δύναμης $F = a^2 - bx^2$, όπου a, b μη μηδενικές σταθερές,

i) να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και η ευστάθειά τους.

ii) Αν είναι $m=1$, $a=1$ και $b=2$, να βρεθούν τα όρια της κίνησης αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $x(0) = 1$ με ταχύτητα $v(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

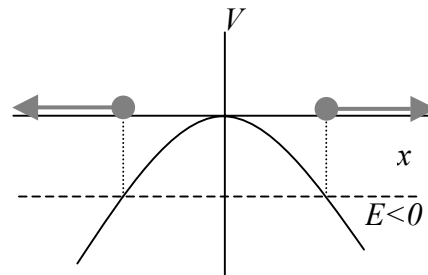
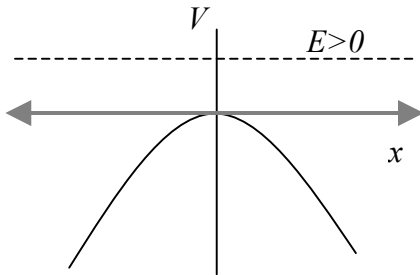
Λύση

(α) Είναι $V = -\frac{1}{2}kx^2$ και οι επιτρεπτές περιοχές της κίνησης δίνονται από την ανισότητα

$$E - V \geq 0 \Rightarrow E + \frac{1}{2}kx^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -\frac{2E}{k} \quad (1)$$

Για $E \geq 0$, η (1) ισχύει για κάθε x . Άρα επιτρεπτή περιοχή είναι όλος ο άξονας $x'Ox$.

Για $E < 0$, η (1) δίνει $x \leq -\sqrt{-\frac{2E}{k}}$ & $x \geq \sqrt{-\frac{2E}{k}}$



(β)

i) Σημεία ισορροπίας $F = 0 \Rightarrow a^2 - bx^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a}{\sqrt{b}}, x_2 = \frac{a}{\sqrt{b}}$

Άρα για $b < 0$ δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας ενώ για $b > 0$ έχουμε δύο σημεία ισορροπίας τα x_1 και x_2 .

Για την ευστάθεια βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο του δυναμικού

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{dF}{dx} \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = 2bx \quad (2)$$

Άρα για το x_1 βρίσκουμε $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_1} = -2b \frac{a}{\sqrt{b}} = -2\sqrt{b}a$. Συνεπώς για $a < 0$ έχουμε ελάχιστο,

δηλαδή ευστάθεια, ενώ για $a > 0$ έχουμε μέγιστο δηλαδή αστάθεια.

Για το x_2 βρίσκουμε $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_1} = 2\sqrt{ba}$. Συνεπώς για $a < 0$ έχουμε μέγιστο δηλαδή αστάθεια, ενώ για $a > 0$ έχουμε ελάχιστο, δηλαδή ευστάθεια.

ii) Το δυναμικό είναι $V = \frac{b}{3}x^3 - a^2x$. Η ενέργεια του συστήματος θα είναι

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{b}{3}x^3 - a^2x = \frac{1}{2}1\frac{2}{3} + \frac{2}{3}1^3 - 1 = 0$$

και άρα

$$E - V(x) \geq 0 \Rightarrow x - \frac{2}{3}x^3 \geq 0 \Rightarrow x(1 - \frac{2}{3}x^2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \& \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Άρα, και λόγω της αρχικής συνθήκης ($x(0)=1$), το υλικό σημείο θα κινείται στο διάστημα $(0, \sqrt{3/2})$

ΘΕΜΑ 2

Υλικό σημείο μάζας m αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης.

α) Να αποδειχτεί ότι η απόκλιση του σημείου από την κατακόρυφο προς Ανατολάς

δίνεται από την σχέση $y = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \varphi$, όπου φ το γεωγραφικό πλάτος του τόπου και ω

η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης.

β) Να αποδειχτεί ότι η παραπάνω απόκλιση εκφράζεται συναρτήσει του ύψους υπό την

μορφή $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega \cos \varphi}{\sqrt{g}} h^{3/2}$.

* Να ορίσετε το σύστημα συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσετε. Επειδή $\omega \ll 1$ να αγνοηθούν οι όροι τάξεως ω^2 .

Λύση

Θεωρούμε ένα μη αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων με αρχή ένα σημείο O της επιφάνειας της Γης και με άξονες Ox (προς τον νότο) Oy (προς ανατολάς) και Oz κατακόρυφο ως προς την επιφάνεια της Γης στο σημείο O . Στο σύστημα αυτό η κίνηση ενός υλικού σημείου υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας δίνεται από τις εξισώσεις

$$\ddot{x} = 2\omega \sin \varphi \dot{y} \quad (1) \quad \ddot{y} = -2\omega \cos \varphi \dot{z} - 2\omega \sin \varphi \dot{x} \quad (2) \quad \ddot{z} = -g + 2\omega \cos \varphi \dot{y} \quad (3)$$

Με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = y(0) = 0, \quad z(0) = h, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$$

α) Η ζητούμενη απόκλιση είναι αυτή κατά τον άξονα y .

$$(1) \Rightarrow \dot{x} = 2\omega \sin \varphi y + c, \quad (4)$$

όπου $c=0$ λόγω αρχικών συνθηκών ($y=0, \dot{x}=0$)

$$(3) \Rightarrow \dot{z} = -gt + 2\omega \cos \varphi y + c, \quad (5)$$

όπου $c=0$ λόγω αρχικών συνθηκών ($t=0, y=0, \dot{z}=0$)

Αντικαθιστούμε τις (4) και (5) στην (2) και βρίσκουμε, θέτοντας $\omega^2=0$,

$$\ddot{y} = 2\omega \cos \varphi (gt) - 4\omega^2 \cos^2 \varphi y - 4\omega^2 \sin^2 \varphi y = (2\omega g \cos \varphi) t \Rightarrow$$

$$\dot{y} = \omega g \cos \varphi t^2 + c_1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \omega g \cos \varphi t^3 + c_1 t + c_2$$

όπου $c_1=0, c_2=0$ λόγω αρχικών συνθηκών ($t=0, \dot{y}=0, y=0$). Άρα

$$\boxed{y = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi} \quad (6)$$

β) Αντικαθιστώντας την (6) στην (5) έχουμε

$$\dot{z} = -gt + \frac{2}{3} \omega^2 g \cos^2 \varphi t^3 \approx -gt \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g t^2 + h \quad (6)$$

Άρα το σώμα πέφτει στην επιφάνεια της Γης ($z=0$) σε χρόνο $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Αντικαθιστώντας

το χρόνο πτώσης στην (6) βρίσκουμε $\boxed{y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega \cos \varphi}{\sqrt{g}} h^{3/2}}$

ΘΕΜΑ 3

(α) Υλικό σημείο κινείται στο χώρο υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -(x^2 + y^2)\hat{k}$. Να αποδειχθεί ότι διατηρείται η συνιστώσα της στροφορμής μόνο κατά τον άξονα Oz .

(β) Η τροχιά υλικού σημείου μάζας m στο χώρο καθορίζεται από τη σχέση

$$\vec{r}(t) = 2t^2\hat{i} + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] \hat{j} + (2 - 2t^2)\hat{k}$$

όπου t ο χρόνος. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης

$$\vec{F} = (-y^2 z^3 - 4xy^2)\hat{i} + (-2xyz^3 - 4x^2 y - 3z)\hat{j} + (-3xy^2 z^2 - 3y - 2)\hat{k}$$

που δρα στο σώμα για το χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=1$.

Λύση

(α) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -x^2 - y^2 \end{vmatrix} = (-yx^2 - y^3)\hat{i} - (-x^3 - xy^2)\hat{j} + 0\hat{k}.$$

Επομένως μόνο η χρονική παράγωγος της L_z συνιστώσας της στροφορμής μηδενίζεται, οπότε $\frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = \sigma\tau\alpha\theta$.

(β) Η δύναμη $\vec{F}$ προέρχεται από δυναμικό γιατί

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2z^3 - 4xy^2 & -2xyz^3 - 4x^2y - 3z & -3xy^2z^2 - 3y - 2 \end{vmatrix} = \\ &= (-6xyz^2 + 6xyz^2)\hat{i} - (-3y^2z^2 + 3y^2z^2)\hat{j} + (-2yz^3 - 8xy + 2yz^3 + 8xy)\hat{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $V(x, y, z)$, ώστε $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(x, y, z)$, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow -y^2z^3 - 4xy^2 = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow V(x, y, z) = xy^2z^3 + 2x^2y^2 + c_1(y, z),$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow -2xyz^3 - 4x^2y - 3z = -2xyz^3 - 4x^2y - \frac{\partial c_1}{\partial y} \Rightarrow c_1(y, z) = 3yz + c_2(z),$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow -3xy^2z^2 - 3y - 2 = -3xy^2z^2 - 3y - \frac{\partial c_2}{\partial z} \Rightarrow c_2(z) = 2z + c.$$

Οπότε

$$V(x, y, z) = xy^2z^3 + 2x^2y^2 + 3yz + 2z.$$

Για τη θέση του κινητού έχουμε: για $t = 0$ $\vec{r}_1 = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 2\hat{k}$, και για $t = 1$ $\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k}$.

Οπότε το έργο της δύναμης W_{12} είναι

$$W_{12} = V(0, 1, 2) - V(2, 1, 0) = 10 - 8 = 2.$$

ΘΕΜΑ 4

Στο πρόβλημα των δυο σωμάτων θεωρούμε δυο σημειακές μάζες m_1 , m_2 που βρίσκονται αντίστοιχα σε θέσεις $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Ο. Τα δυο υλικά σημεία ασκούν το ένα στο άλλο δυνάμεις οι οποίες υπακούουν στο τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα. Αν $\vec{R}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας των δυο σωμάτων ως προς το Ο, $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης της μάζας m_2 ως προς την m_1 , και $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ αντίστοιχα τα διανύσματα θέσης των μαζών m_1 , m_2 ως προς το κέντρο μάζας τους, να δείξετε **αναλυτικά** ότι η στροφορμή του συστήματος:

$$\vec{L} = \vec{R}_1 \times m_1 \vec{u}_1 + \vec{R}_2 \times m_2 \vec{u}_2$$

όπου $\vec{u}_1 = \dot{\vec{R}}_1$, $\vec{u}_2 = \dot{\vec{R}}_2$, μπορεί να γραφτεί ως

$$\vec{L} = \vec{R} \times m \vec{u}_K + \vec{r} \times \mu \vec{u}$$

όπου $m = m_1 + m_2$, $\vec{u}_K = \dot{\vec{R}}$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ και $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$

Λύση

(α) Από τον ορισμό του κέντρου μάζας (ΚΜ) και το σχήμα της εκφώνησης έχουμε:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1. \quad (1)$$

Λύνοντας τη σχέση (1) ως προς $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ παίρνουμε:

$$\vec{R}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{R}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας τις (2) και (3) έχουμε:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_K + \vec{u}'_1, \quad \vec{u}_2 = \vec{u}_K + \vec{u}'_2, \quad (4)$$

$$\vec{u}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u}, \quad \vec{u}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}. \quad (5)$$

Από τις (3) και (5) έχουμε:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}, \quad m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2 = \vec{0}. \quad (6)$$

Οπότε για τη στροφορμή έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{R}_1 \times m_1 \vec{u}_1 + \vec{R}_2 \times m_2 \vec{u}_2 \stackrel{(2),(3),(4)}{=} \\ &= (\vec{R} + \vec{r}_1) \times m_1 (\vec{u}_K + \vec{u}'_1) + (\vec{R} + \vec{r}_2) \times m_2 (\vec{u}_K + \vec{u}'_2) = \\ &= \vec{R} \times m_1 \vec{u}_K + \vec{R} \times m_1 \vec{u}'_1 + \vec{r}_1 \times m_1 \vec{u}_K + \vec{r}_1 \times m_1 \vec{u}'_1 + \\ &+ \vec{R} \times m_2 \vec{u}_K + \vec{R} \times m_2 \vec{u}'_2 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{u}_K + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{u}'_2 = \\ &= \vec{R} \times (m_1 + m_2) \vec{u}_K + \vec{R} \times (m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2) + (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \times \vec{u}_K + \vec{r}_1 \times m_1 \vec{u}'_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{u}'_2 \stackrel{(5),(6)}{=} \\ &= \vec{R} \times m \vec{u}_K - \vec{r}_1 \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} + \vec{r}_2 \times \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{u} = \\ &= \vec{R} \times m \vec{u}_K + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \mu \vec{u} \stackrel{(3)}{=} \\ &= \vec{R} \times m \vec{u}_K + \vec{r} \times \mu \vec{u}. \end{aligned}$$

